デフォルトの起こり得る証券のモデル化と価格付け理論について

塚 原 英 敦

1　はじめに

本稿では，Duffie and Singleton [4] (以下 [DS]) と Duffie, Schroder and Skiadas [3] (以下 [DSS]) で論じられているデフォルトの起こり得る証券 (defaultable securities) のモデル化及びその価格付けについて論じる．特に，彼らのいくつかの結果のうち，若干仮定を弱められる部分と証明を簡略化できる部分について詳述する．

2　基本的な設定

$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ をフィルター確率空間 (filtered probability space) とする．ここで，$\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ は与えられた増大情報系 (filtration) であり，$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ は次のいわゆる通常の条件 (usual conditions) を満たすものとする：

(i) $\mathscr{F}$ は $\mathbf{P}$-完備である．

(ii) $\mathscr{F}_0$ は $\mathscr{F}$ の中のすべての $\mathbf{P}$-零集合を含む．

(iii) $\mathbb{F}$ は右連続である (すなわち，すべての $t \in [0, T]$ に対して，$\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t+} \triangleq \cap_{u>t} \mathscr{F}_u$)．

まず，証券市場について次の仮定を置く．

A1 ：短期金利過程 (short rate process) r は可予測 (previsible) かつ有界である．

A2 ：r の下で，$\mathbf{P}$ は同値なマルチンゲール測度 (equivalent martingale measure) である．

今，満期 T までにデフォルトが起こらなければ時点 T で X 円が支払われ，時点 $t < T$ でデフォルトが起こったときにはその時点で Z_t 円が支払われる証券を考える．そして，次の条件を仮定する．

A3 ：X は $\mathbf{E}(|X|) < \infty$ を満たす $\mathscr{F}_T$-可測確率変数である．

A4 ：Z は $\mathbf{E}(|Z_T^*|) < \infty$ を満たす可予測過程である．ここで，$Z_t^* \triangleq \sup_{s \leq t} |Z_s|$ である．

これら2つの仮定は，[DSS] に与えられているものよりも若干弱いことに注意されたい．

次に，デフォルトが起こる (ランダムな) 時点を $\mathbb{F}$-停止時刻 τ で表し，$H_t = \mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}}$ とおく．H はクラス (D) の劣マルチンゲール (submartingale) であるから，Doob-Meyer 分解によって $H = M + A$ と書ける．ここで M は一様可積分なマルチンゲール，A は $A_0 = 0$ を満たす可予測可積分増加過程である．

A5 ：可予測かつ有界な正過程 h が存在して

$$A_t = \int_0^{t \wedge \tau} h_u \, du = \int_0^t h_u \mathbf{1}_{\{u < \tau\}} \, du$$

と書ける．

この h は生起度過程 (intensity process) と呼ばれる．ここで h は $\mathbf{P}$ に依存することに注意しよう．**A5** より，A は連続である．これはすべての有限な可予測時刻 ρ に対して $\mathbf{E}(H_\rho) = \mathbf{E}(H_{\rho-})$ となることを意味する

が (Rogers and Williams [8], Theorem VI.31.1)，H は増加過程だから $\Delta H_\rho = 0$, **P**-a.s. を得る．H のジャンプは τ でのみ起こり得るということから，すべての可予測時刻 ρ に対して $\mathbf{P}(\tau = \rho < \infty) = 0$ となることがわかる．すなわち，τ は完全予測不能時刻 (totally inaccessible time) である．

また，$M = H - A$ は有限変動をもつ過程だから，M の良可測 2 次変動過程 (optional quadratic variation) $[M]$ は

$$[M]_t = \sum_{s \leq t} (\Delta M_s)^2 = \sum_{s \leq t} (\Delta H_s)^2 = H_t$$

で与えられ，さらに M の可予測 2 次変動過程 (previsible quadratic variation) $\langle M \rangle$ は A となることがわかる．

3　デフォルトの起こり得る証券の価格過程

前節のように定義されたデフォルトの起こり得る証券の価格過程 S は次のようにして得られる．

[DS] のアプローチ

まず時点 σ に W が支払われる条件付請求権 (contingent claim) を (W, σ) で表す．ただし，σ は停止時刻，W は $\mathscr{F}_\tau$-可測な可積分確率変数である．その価格過程は **A2** より，

$$U_t = \mathbf{E}\left[\exp\left(-\int_t^\sigma r_u \, du \right) W \,\middle|\, \mathscr{F}_t \right] \mathbf{1}_{\{t < \sigma\}}$$

で与えられる．上のデフォルトの起こり得る証券は $W = X\mathbf{1}_{\{T<\tau\}} + Z_\tau \mathbf{1}_{\{T\geq\tau\}}$，$\sigma = \tau \wedge T$ として記述されるから，その価格過程 S は

$$\begin{aligned} S_t &= \mathbf{E}\left[\exp\left(-\int_t^{\tau\wedge T} r_u\,du\right)\left(X\mathbf{1}_{\{T<\tau\}} + Z_\tau\mathbf{1}_{\{T\geq\tau\}}\right)\,\middle|\,\mathscr{F}_t\right]\mathbf{1}_{\{t<\tau\wedge T\}} \\ &= \mathbf{E}\left[\exp\left(-\int_t^T r_u\,du\right)X\mathbf{1}_{\{T<\tau\}}\mathbf{1}_{\{t<T\}}\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \exp\left(-\int_t^\tau r_u\,du\right)Z_\tau\mathbf{1}_{\{T\geq\tau\}}\mathbf{1}_{\{t<\tau\}}\,\middle|\,\mathscr{F}_t\right] \\ &= \mathbf{E}\left[\exp\left(-\int_t^T r_u\,du\right)X\mathbf{1}_{\{T<\tau\}}\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \int_{(t,T]}\exp\left(-\int_t^u r_s\,ds\right)Z_u\,dH_u\,\middle|\,\mathscr{F}_t\right]\mathbf{1}_{\{t<T\}} \end{aligned} \tag{3.1}$$

となる．

[DSS] のアプローチ

上の証券は次の (累積) 配当過程 ((cumulative) dividend process) をもつ証券として定義することもできる．

$$\begin{aligned} D_t &= \begin{cases} Z_\tau\mathbf{1}_{\{\tau\leq t\}}, & t<T, \\ Z_\tau\mathbf{1}_{\{\tau\leq T\}} + X\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}, & t\geq T, \end{cases} \\ &= \int_{[0,t\wedge T]} Z_u\,dH_u + X\mathbf{1}_{\{\tau>T,t\geq T\}}, \quad t\geq 0 \end{aligned}$$

配当がある場合の価格付け理論から (Duffie [2], 6K 節の (18) 式)，この証券の価格過程 S_t は

$$S_t = \mathbf{E}\left[\exp\left(-\int_t^T r_u\,du\right)S_T + \int_t^T \exp\left(-\int_t^s r_u\,du\right)dD_s\,\middle|\,\mathscr{F}_t\right]$$

となる．ここで時点 T 以後にいかなる配当もないことから $S_t = 0,\ t \geq T$ となり (S_t は配当後の (ex-dividend) 価格である)，上の D の表現を代入すると，

$$S_t = \mathbf{E}\left[\exp\left(-\int_t^T r_u\,du\right) X\mathbf{1}_{\{T<\tau\}} + \int_{(t,T]} \exp\left(-\int_t^u r_s\,ds\right) Z_u\,dH_u \,\middle|\, \mathscr{F}_t\right]\mathbf{1}_{\{t<T\}}$$

となり，当然 (3.1) 式と一致する．

いま，$R_t \triangleq \exp\left(-\int_0^t r_s\,ds\right)$ とおくと，(3.1) 式は

$$S_t R_t = \mathbf{E}\left[R_T X\mathbf{1}_{\{T<\tau\}} + \int_{(t,T]} R_u Z_u\,dM_u + \int_t^T R_u Z_u (1-H_u) h_u\,du \,\middle|\, \mathscr{F}_t\right]\mathbf{1}_{\{t<T\}}$$

と変形できる．ここで，

$$\int_{(0,t]} R_u Z_u\,dM_u = ((RZ)\bullet M)_t$$

を考えると，

$$[(RZ)\bullet M]_T = \int_0^T (RZ)^2\,d[M] = \int_0^T (RZ)^2\,dH = (R_\tau Z_\tau)^2\mathbf{1}_{\{\tau\leq T\}}$$

である．**A1** より R は有界閉区間上で有界であるから，**A4** を用いて

$$\mathbf{E}\left(\sqrt{[(RZ)\bullet M]_T}\right) \leq \text{const}\cdot\mathbf{E}(|Z_\tau|\mathbf{1}_{\{\tau\leq T\}}) \leq \mathbf{E}(Z_T^*) < \infty$$

となり，$(RZ)\bullet M$ はマルチンゲールとなる．したがって，

$$S_t R_t = \mathbf{E}\left[R_T X\mathbf{1}_{\{T<\tau\}} + \int_t^T R_u Z_u (1-H_u) h_u\,du \,\middle|\, \mathscr{F}_t\right]\mathbf{1}_{\{t<T\}},$$

よって，

$$\begin{aligned}S_t = \mathbf{E}\biggl[&\exp\Bigl(-\int_t^T r_u\,du\Bigr)X\mathbf{1}_{\{T<\tau\}}\\&+\int_t^T \exp\Bigl(-\int_t^u r_s\,ds\Bigr)Z_u h_u(1-H_u)\,du\,\Bigg|\,\mathscr{F}_t\biggr]\mathbf{1}_{\{t<T\}}\end{aligned}\tag{3.2}$$

となる．これは [DSS] の (3) 式であるが，そこで指摘されているようにこの式はデフォルト時刻 τ を明示的に含むため，価格評価式としては不都合である．[DSS] はその Proposition 1 でより扱いやすい形を与えているが，どうやって [DSS] (4) 式の V が得られたのかを以下でやや直観的に考えよう．

[DS] に従えば，$V_t = S_t$，$t < \tau$，かつ $V_T = X$ となる過程 V が求まれば都合が良い．つまり，

$$\begin{aligned}V_t\mathbf{1}_{\{t<\tau\}} = \mathbf{E}\biggl[&\exp\Bigl(-\int_t^T r_u\,du\Bigr)V_T\mathbf{1}_{\{T<\tau\}}+\\&\int_t^T \exp\Bigl(-\int_t^u r_s\,ds\Bigr)Z_u(1-H_u)h_u\,du\,\Bigg|\,\mathscr{F}_t\biggr],\end{aligned}$$

かつ $V_T = X$ を満たす V を探すということである．上式を満たすということは，割引済み利潤過程 (discounted gains process)

$$\begin{aligned}G_t = \exp&\Bigl(-\int_0^t r_u\,du\Bigr)V_t(1-H_t)\\&+\int_0^t \exp\Bigl(-\int_0^u r_s\,ds\Bigr)Z_u(1-H_u)h_u\,du\end{aligned}$$

がマルチンゲールになることと同等である．ここで簡単のため，前に定義した記号 R_t と $\widetilde{H}_t \triangleq 1 - H_t$ を用いると，

$$G_t = R_tV_t\widetilde{H}_t + \int_0^t R_uZ_u\widetilde{H}_uh_u\,du$$

となる．R は連続な有限変動過程で $dR_t = -r_tR_t\,dt$ を満たし，$\widetilde{H}$ は有限変動過程で $d\widetilde{H}_t = -dH_t$ を満たすことに注意して，右辺の第1項に伊

藤の公式を適用すると

$$
\begin{aligned}
&R_t V_t \widetilde{H}_t - V_0 \\
&= \int_{(0,t]} V_{s-} \widetilde{H}_{s-}\, dR_s + \int_{(0,t]} R_{s-} \widetilde{H}_{s-}\, dV_s + \int_{(0,t]} R_{s-} V_{s-}\, d\widetilde{H}_s \\
&+ \sum_{0<s\le t} \left[R_s V_s \widetilde{H}_s - R_{s-} V_{s-} \widetilde{H}_{s-} - (R_s \widetilde{H}_{s-} \Delta V_s + R_s V_{s-} \Delta \widetilde{H}_{s-}) \right]
\end{aligned}
$$

そして

$$
\begin{aligned}
R_t V_t \widetilde{H}_t - G_0 = &- \int_0^t V_{s-} \widetilde{H}_{s-} r_s R_s\, ds + \int_{(0,t]} R_s \widetilde{H}_{s-}\, dV_s \\
&- \int_{(0,t]} R_s V_{s-}\, dH_s - \int_{(0,t]} R_\tau \Delta V_\tau\, dH_s
\end{aligned}
$$

を得る．ここで，右辺最後の ΔV_τ を含む項を，時点 τ での割引後の配当が $R_\tau \Delta V_\tau$ である配当過程とみて G からあらかじめ引いておくことにすると都合が良い．つまり，その配当の分だけ別扱いして後から調整するのである．よって，

$$
\begin{aligned}
\widehat{G}_t &\triangleq G_t - G_0 + \int_{(0,t]} R_\tau \Delta V_\tau\, dH_s \\
&= - \int_0^t V_{s-} \widetilde{H}_{s-} r_s R_s\, ds + \int_{(0,t]} R_s \widetilde{H}_{s-}\, dV_s \\
&\quad - \int_{(0,t]} R_s V_{s-}\, dH_s + \int_0^t R_s Z_s \widetilde{H}_s h_s\, ds
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

とおき，$\widehat{G}$ をマルチンゲールにするような V を求めたとき，この V から

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\int_t^T \exp\left(- \int_t^u r_s\, ds \right) \frac{R_\tau}{R_u} \Delta V_\tau\, dH_s \,\middle|\, \mathscr{F}_t \right] \\
&= \mathbf{E}\left[\exp\left(- \int_t^\tau r_s\, ds \right) \Delta V_\tau \mathbf{1}_{\{t<\tau\le T\}} \,\middle|\, \mathscr{F}_t \right]
\end{aligned}
$$

を引いたものが，$\{t < \tau\}$ 上で S と等しくなるわけである．

(3.3) 式より

$$\widehat{G}_t = -\int_0^t V_{s-}\widetilde{H}_{s-} r_s R_s\, ds + \int_{(0,t]} R_s \widetilde{H}_{s-}\, dV_s - \int_{(0,t]} R_s V_{s-}\, dM_s$$
$$- \int_0^t R_s V_{s-} \widetilde{H}_s h_s\, ds + \int_0^t R_s Z_s \widetilde{H}_s h_s\, ds,$$

よって,

$$\int_{(0,t]} R_s \widetilde{H}_{s-}\, dV_s = \int_0^t V_s (r_s + h_s) \widetilde{H}_{s-} R_s\, ds - \int_0^t R_s Z_s \widetilde{H}_{s-} h_s\, ds$$
$$+ \widehat{G}_t + \int_{(0,t]} R_s V_{s-}\, dM_s$$

となるが，両辺で R^{-1}(**A1** より有界) を積分すると,

$$V_{t\wedge\tau} = \int_0^{t\wedge\tau} V_s(r_s + h_s)\, ds - \int_0^{t\wedge\tau} Z_s h_s\, ds$$
$$+ \int_0^{t\wedge\tau} R_s^{-1}\, d\widehat{G}_s + \int_{(0,t]} V_{s-}\, dM_s$$

を得る．右辺第 3 項はマルチンゲールだが，第 4 項は V の形がわからないのでマルチンゲールであるかはわからない．ここではそうであると仮定して話を進める (V を求めてから後付け的に確認する)．また，後に τ で止めることにすると,

$$V_t = \int_0^t V_s(r_s + h_s)\, ds - \int_0^t Z_s h_s\, ds + m_t \tag{3.4}$$

を考えればよい．ただし m はマルチンゲールである.

ここで，次の補題が有用となる ([DSS], Lemma 1).

補題 3.1 B を可積分変動をもつ $\mathbb{F}$-適合過程，ξ を発展的可測 (progressive) な有界過程とする．このとき，$\mathbb{F}$-適合 càdlàg 過程 Y があるマルチンゲール m に対して,

$$Y_t = -B_t + \int_0^t Y_s \xi_s\, ds + m_t, \quad t \le T \tag{3.5}$$

を満たすための必要十分条件は

$$Y_t = \mathbf{E}\biggl[\exp\biggl(-\int_t^T \xi_s\,ds\biggr)Y_T + \int_{(t,T]} \exp\biggl(-\int_t^u \xi_s\,ds\biggr)\,dB_u \,\bigg|\, \mathscr{F}_t\biggr], \quad t \le T \tag{3.6}$$

が成り立つことである.

この補題で, $B_t = \int_0^t Z_s h_s\,ds$, $\xi_t = r_t + h_t$ とすれば, $V_T = X$ より

$$V_t = \mathbf{E}\biggl[\exp\biggl(-\int_t^T (r_s + h_s)\,ds\biggr)X + \int_t^T \exp\biggl(-\int_t^u (r_s + h_s)\,ds\biggr)Z_u h_u\,du \,\bigg|\, \mathscr{F}_t\biggr]$$

を得る.

以上の自己発見的議論より, 次の定理 ([DSS], Proposition 1) が成り立つことが容易に予想されよう.

定理 3.2 $\mathbb{F}$-適合 càdlàg 過程 V を

$$V_t \triangleq \begin{cases} \mathbf{E}\biggl[\exp\biggl(-\int_t^T (r_s + h_s)\,ds\biggr)X + \int_t^T \exp\biggl(-\int_t^u (r_s + h_s)\,ds\biggr)Z_u h_u\,du \,\bigg|\, \mathscr{F}_t\biggr], & t < T, \\ 0 & t \ge T, \end{cases}$$

で定義すると,

$$S_t = V_t - \mathbf{E}\left[\exp\left(-\int_t^\tau r_s\,ds\right)\Delta V_\tau \,\middle|\, \mathscr{F}_t\right]$$

が $\{t < \tau\}$ 上で成り立つ. さらに, V が可予測であれば, すべての $t \ge 0$ について $S_t = V_t \mathbf{1}_{\{t<\tau\}}$ が成り立つ.

[**証明**] V が可予測であれば，そのジャンプは可予測時刻でのみ起こり得るが，我々は τ が完全予測不能時刻であることを知っているから，$\Delta V_\tau = 0$, $\mathbf{P}$-a.s. よって，最後の主張は明らかである.

定理3.2の厳密な証明は原論文を参照すればよいのだが．ここでは，彼らの Z と X の可積分性に関する仮定（ある $p>1$ に対して $\mathbf{E}(|X|^p)<\infty$, $\mathbf{E}(|Z^*|^p)<\infty$）が，より自然な上の **A3** と **A4** で置き換えられることを示そう.

この条件が必要となるのは，[DSS], p. 1087の後半で

$$\int_{(0,t]} (Z_s - V_{s-})\, dM_s, \quad t \le T \tag{3.7}$$

がマルチンゲールになることを示す部分である．最初に局所マルチンゲール X に関する可予測過程 K の確率積分 $K \bullet X$ が $[0,T]$ 上の $\mathscr{H}^1$-マルチンゲールになるための必要十分条件は

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_{(0,T]} K_s^2\, d[M]_s\right)^{\frac{1}{2}}\right] < \infty$$

であることに注意する．今の場合，$[M]=H$ となることから，**A4** より

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_{(0,T]} Z_s^2\, d[M]_s\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \mathbf{E}(|Z_\tau|\mathbf{1}_{\{\tau\le T\}}) \le \mathbf{E}(|Z_T^*|) < \infty.$$

さらに，

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_{(0,T]} V_{s-}^2\, d[M]_s\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \mathbf{E}(|V_{\tau-}|\mathbf{1}_{\{\tau\le T\}})$$

であるが，$t \le T$ に対して

$$\begin{aligned}|V_t| &\le \text{const}\cdot\left[\mathbf{E}\left(|X| + \int_t^T |Z_u|\,du \,\middle|\, \mathscr{F}_t\right)\right]\\ &\le \text{const}\cdot\mathbf{E}\big(|X| + |Z_T^*| \,\big|\, \mathscr{F}_t\big)\end{aligned}$$

となり，$|V_t|$ は $[0,T]$ 上で一様可積分マルチンゲールで押さえられることがわかる．一様可積分マルチンゲール X については任意の停止時刻 τ に対して $X_{\tau-}$ は可積分であるから，$\mathbf{E}(|V_{\tau-}|\mathbf{1}_{\{\tau\le T\}})<\infty$ を得る.

あとは不等式 $(a-b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ を用いれば，(3.7) で定義される確率過程がマルチンゲール（実は $\mathscr{H}^1$-マルチンゲール）となることが容易にわかる． ■

4　おわりに

[DS] では $\Delta V_\tau = 0$, $\mathbf{P}$-a.s を仮定しているから，その Theorem 1 の証明は（一意性を除いて）上の議論と全く同様にしてできる（ただし，多少の正則条件を加えることは必要である）．ここで仮定 $\Delta V_\tau = 0$, $\mathbf{P}$-a.s はどのくらい説得力があるのかを考えよう．いま，$\xi = r+h$, $\Xi_t = \exp\left(\int_0^t \xi_s\, ds\right)$ とおくと，定理 3.2 の V を与える式は

$$V_t\Xi_t + \int_0^t \Xi_u Z_u h_u\, du = \mathbf{E}\left[\Xi_T X + \int_0^T \Xi_u Z_u h_u\, du \,\middle|\, \mathscr{F}_t\right], \quad t < T$$

と書ける．この右辺のマルチンゲールを L と書くことにすると，$\Delta V_t = \Xi_t^{-1}\Delta L_t$ となる．つまり，$\Delta V_\tau = 0$ は $\Delta L_\tau = 0$ と同じことである．定理 3.2 はデフォルトが起こり得る証券すべてについて成り立ってほしいものであるから，当然 X が $L^1(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathbf{P})$ の任意の要素で成立すべきものである．ところが，r, h と Z は所与であるから，$\{(L_t)_{0\leq t\leq T} : X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathbf{P})\}$ は $t \in [0,T]$ で定義された一様可積分マルチンゲール全体 $\mathscr{M}_T$ となる ($t \in \mathbb{R}_+$ で考えたければ，T で止められた一様可積分マルチンゲール全体と言ってもよい)．Dellacherie and Meyer [1], VI.78（あるいは He, Wang and Yan [5], Theorem 5.35）によれば τ が完全予測不能であることと，τ でのみ大きさ 1 のジャンプをもつ一様可積分マルチンゲールが存在することは同値であるから，すべての $L \in \mathscr{M}_T$ に対して $\Delta L_\tau = 0$, $\mathbf{P}$-a.s となることは $\mathbf{P}(\tau > T) = 1$ でない限りあり得ない．つまり，$\Delta V_\tau = 0$, $\mathbf{P}$-a.s が成り立つかどうかは満期までにデフォルトがなかった場合に支払われる X に依存するという奇妙なことになってしまう．

さらに，定理 3.2 の最後に述べられている “V が可予測ならば” という条件もマルチンゲール L が可予測ということを意味するが，これは L が連続ということを意味する．もし上と同様に X を動かした場合，T で止められた一様可積分マルチンゲールすべてが連続となり，そこから増大情報系 $(\mathscr{F}_{t\wedge T})_{t\in\mathbb{R}_+}$ についての停止時刻はすべて可予測ということが導かれる．これは τ が完全予測不能であることと整合的ではない．

以上の議論から，r, h と Z は固定しても，$\Delta V_\tau = 0$, $\mathbf{P}$-a.s という仮定が成り立つかどうかは各証券ごとに異なり，そしてそれをチェックすることは困難であるという非常に不満足な結果に終わってしまう．これらを改善することが今後の課題であると言えよう．

付録

A　補題 3.1 の証明

この付録では，[DSS] に与えられている補題 3.1 の証明を改良したものを与える．まず，

$$R_t \triangleq \exp\left(-\int_t^T \xi_s\,ds\right)$$
$$N_t \triangleq \mathbf{E}\left[\int_0^T R_u\,dB_u + R_T Y_T \,\middle|\, \mathscr{F}_t\right]$$

とおく．すると，

$$Y_t = \mathbf{E}\left[\exp\left(-\int_t^T \xi_s\,ds\right)Y_T + \int_{(t,T]} \exp\left(-\int_t^u \xi_s\,ds\right)dB_u \,\middle|\, \mathscr{F}_t\right]$$

は

$$Y_t R_t = \mathbf{E}\left[\int_t^T R_u\,dB_u + R_T Y_T \,\middle|\, \mathscr{F}_t\right] = -\int_0^t R_u\,dB_u + N_t \quad \text{(A.1)}$$

と同等であることがわかる．

まず十分性を示すために，(3.6) が成り立つと仮定する．このとき，Y はセミマルチンゲールであるから，部分積分により

$$Y_t R_t = \int_0^t Y_{s-}\, dR_s + \int_0^t R_{s-}\, dY_s = \int_0^t Y_s \xi_s R_s\, ds + \int_0^t R_s\, dY_s \tag{A.2}$$

が得られる．ゆえに，

$$\int_0^t R_s\, dY_s = -\int_0^t R_s\, dB_s - \int_0^t Y_s \xi_s R_s\, ds + N_t$$

より

$$Y_t = -B_t + \int_0^t Y_s \xi_s\, ds + m_t, \quad \text{ただし } m_t \triangleq \int_0^t R_s^{-1}\, dN_t$$

となるが，ξ は有界であるから m はマルチンゲールである．

次に必要性を示す．(3.5) より

$$\int_0^t R_s\, dY_s = -\int_0^t R_s\, dB_s - \int_0^t Y_s \xi_s R_s\, ds + \int_0^t R_s\, dm_t$$

となる一方で，部分積分により (A.2) が得られ，よって

$$Y_t R_t = -\int_0^t R_s\, dB_s + \int_0^t R_s\, dm_s$$

となる．また，$(\int_0^t R_s\, dm_s)$ はマルチンゲールだから，

$$\mathbf{E}(Y_T R_T \mid \mathscr{F}_t) = \mathbf{E}\left(-\int_0^T R_s\, dB_s \,\middle|\, \mathscr{F}_t\right) + \int_0^t R_s\, dm_s$$

が成り立つ．したがって，

$$Y_t R_t - \mathbf{E}(Y_T R_T \mid \mathscr{F}_t) = -\int_0^t R_s\, dB_s + \mathbf{E}\left(-\int_0^T R_s\, dB_s \,\middle|\, \mathscr{F}_t\right)$$

となり，これは (A.1) と同等である．　■

参考文献

[1] Dellacherie, C. and Meyer, P.-A. (1980). *Probabilités et potentiel*, Chapitres V-VIII: Théorie des martingales, Hermann.

[2] Duffie, D. (1996). *Dynamic Asset Pricing Theory*, 2nd ed., Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey.

[3] Duffie, D., Schroder, M. and Skiadas, C. (1996). Recursive valuation of defaultable securities and the timing of resolution of uncertainty, *Ann. Appl. Probab.*, **6**, 1075–1090.

[4] Duffie, D. and Singleton, K. J. (1999). "Modeling term structures of defaultable bonds", *Rev. Fin. Stud.*, **12**, 687–720.

[5] He, S.-W., Wang, J.-G. and Yan, J.-A. (1992). *Semimartingale Theory and Stochastic Calculus*, Science Press and CRC Press, Beijing New York.

[6] Kusuoka, S. (1999). A remark on default risk models, in: *Advandces in Mathematical Economics, Vol. 1*, pp. 69–82. S. Kusuoka and T. Maruyama eds., Springer-Verlag.

[7] Lando, D. (1997). Modelling bonds and derivatives with default risk, in: *Mathematics of Derivative Securities*, pp. 369–393. M. H. A. Dempster and S. R. Pliska eds., Cambridge Univ. Press.

[8] L. C. G. Rogers and D. Williams (1987). *Diffusions, Markov Processes, and Martingales*, Vol. 2: Itô Calculus, Wiley.